

Интерполяционная формула Ньютона.

Пусть для функции $y=f(x)$ заданы значения $y_i=f(x_i)$ для равноотстоящих значений независимой переменной $x_i=x_0+i*h$ ($i=0,n$), где h - шаг интерполяции.

Требуется подобрать полином $P_n(x)$ степени не выше n , принимающий в точках x_i значения $P_n(x_i)=y_i$ ($i=0,n$)

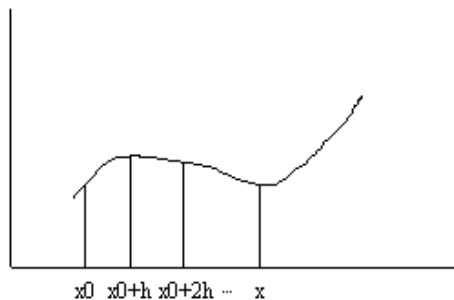
Ньютон решил поставленную задачу:

$$P_n(x)=y_0+q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

$$\text{где } q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Эта формула называется первой интерполяционной формулой Ньютона.

К



Каков физический смысл имеет переменная q в первой интерполяционной формуле Ньютона.

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \left| \frac{x - x_0}{h} \right| = \frac{x_0 + kh - x_0}{h} = k,$$

где k - число шагов, необходимых для достижения точки x , исходя из точки x_0 .

Рассмотрим частные случаи $n=1$ или $n=2$:

$n=1$ $P_1(x)=y_0+q \Delta y_0$ – линейное интерполирование

$$n=2 \quad P_2(x) = y_0 + q y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} {}^2y_0 \text{—параболическое} \quad (\text{квадратичное})$$

интерполирование

Пример: необходимо построить интерполяционный полином Ньютона для функции $y = \frac{1}{x}$ на отрезке $[4;8]$ с $h=1$

X	4	5	6	7	8
Y	0.25	0.2	0.167	0.143	0.125

Горизонтальная таблица разностей.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
4	0.25	-0.05	0.017	-0.008	0.005
5	0.2	-0.033	0.009	-0.003	
6	0.167	-0.024	0.006		
7	0.143	-0.018			
8	0.125				

Т.о., при наличии 5 точек максимальный порядок существующей конечной разности =4, максимальная степень полинома =4.

$$P_4(x) = y_0 + q y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!} \Delta^4 y_0$$

Как пользоваться формулой?

Допустим, необходимо определить значение в точке $x=4.4$

$$\text{Узловые точки } x_0=4, h=1, \text{ тогда } q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{4.4 - 4}{1} = 0.4$$

$$P_4(4.4) = 0.25 + 0.4 \cdot 0.05 + \frac{0.4 \cdot (-0.6)}{2} \cdot 0.017 + \frac{0.4 \cdot (-0.6) \cdot (-1.6)}{6} \cdot (-0.008) + \frac{0.4 \cdot (-0.6) \cdot (-1.6) \cdot (-2.6)}{24} \cdot 0.005 \approx 0.22468$$

Точное значение
=0.22727.

Вторая интерполяционная формула Ньютона.

Первая интерполяционная формула Ньютона практически неудобна для интерполирования значений вблизи конца таблицы. В этом случае обычно применяется вторая интерполяционная формула Ньютона.

$$P_n(x) = y_n + q \Delta y_{n-1} + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1) \dots (q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

Пример: $y = \sin x$ $x \in [30^\circ; 55^\circ]$, $h=5$

Горизонтальная таблица разностей.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
30	0.5000	0.0736	-0.0044	-0.0005	0	0.0002
35	0.5736	0.0692	-0.0049	-0.0005	0.0002	
40	0.6428	0.0643	-0.0054	-0.0003		
45	0.7071	0.0589	-0.0057			
50	0.7660	0.0532				
55	0.8192					

Пример: Отыщем $\sin(51^\circ)$, $x_n=51$, $x=50^\circ$, $q=0.2$

$$\begin{aligned} \sin(51^\circ) = P_5(51) &= 0.766 + 0.2 \cdot 0.0589 + \frac{0.2 \cdot 1.2}{2} \cdot (-0.0054) + \frac{0.2 \cdot 1.2 \cdot 2.2}{6} \cdot (-0.0005) + \\ &+ \frac{0.2 \cdot 1.2 \cdot 2.2 \cdot 3.2}{24} \cdot 0 = 0.7660 + 0.01178 - 0.00065 - 0.00004 + 0 = 0.77709 \end{aligned}$$

Как первая, так и вторая формула Ньютона может быть использована для экстраполирования функции, т.е. для нахождения значений функции y для значений аргументов x , лежащих вне пределов таблицы.

Если $x < x_0$, то лучше применять первую интерполяционную функцию Ньютона.

Если $x > x_0$, то лучше применять вторую интерполяционную функцию Ньютона.

Т.е., 1ИФН используется для интерполирования вперёд и экстраполирования назад.

2 ИФН используется для интерполирования назад и экстраполирования вперёд.

Как видно из формул 1 и 2 , при интерполяции используется разности: в 1ИФН ny_0 , во 2ИФН $^ky_{k+}$.

Но существуют формулы, называемые формулы с центральными разностями, к ним относятся:

- ИФ Гаусса
- ИФ Стерлинга
- ИФ Бесселя,

которые используют разности, расположенные в горизонтальной строке диагональной таблицы, соответствует начальным значениям x_k, y_k или в строках близлежащих.

Но все эти формулы работают только для постоянного шага.

Необходимо отметить следующее:

при построении интерполяционных формул Ньютона в качестве начального значения x_0 выбирается первый или последний узел интерполирования; для центральных формул начальный узел является средним.

При $|q| \leq 0.25$ применяют формулу Стирлинга, а при $0.25 \leq q \leq 0.75$ - Бесселя.

1ИФН и 2ИФН применяют тогда, когда интерполирование производится в начале или в конце таблицы и нужных центральных разностей не хватает.